

А.В. ОРГАНОВ

ЗАВИСИМОСТЬ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДЛИННЫХ КОСТЕЙ КОНЕЧНОСТЕЙ ЧЕЛОВЕКА ОТ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОСТИ КОСТНОГО РЕГЕНЕРАТА ПРИ ДИАФИЗАРНЫХ ПЕРЕЛОМАХ

Для оцінки несучої здібності довгої кістки в ході заживлення діафізарного перелому може бути використаний метод вимірювання частоти власних поперечних коливань цієї кістки. У статті наводиться виведення залежності частоти власних коливань від величини механічної жорсткості діафізарної частини кістки при компактних пошкодженнях.

For estimation of long bone carrying ability during diaphyseal fracture healing the method of proper cross rippling frequency measurement of this bone can be used. The paper shows the conclusion of proper rippling frequency dependence from value of diaphyseal bone area mechanical rigidity by distributed and compact damages .

Постановка проблемы. Переломы средней трети длины кости длинных костей конечностей человека (диафизарные переломы) встречаются достаточно часто. В начальном периоде восстановления перелома контроль процесса появления костного регенерата и нарастания его жесткости весьма затруднен. Это происходит вследствие того, что плотность костного регенерата в месте перелома в начальном периоде почти не отличается от плотности мягких тканей и существующие методы рентгениягностики не дают информации. Начало процесса набора прочности костным регенератом и скорость этого процесса обычно остаются вне контроля.

Анализ литературных источников. Анализ литературы показывает, что возможность применения виброакустических колебаний для оценки прочностных свойств срастающихся длинных костей как альтернатива методам рентгениягностики рассматривалась в литературе уже давно [1, 2]. Были получены обнадеживающие результаты. Однако, уровень техники и имеющиеся тогда методики не позволяли создавать удобные, быстросействующие, дающие надежные данные устройства [3]. Современная компьютерная техника и программное обеспечение изменили эту ситуацию, но потребовали уточнения многих известных теоретических представлений и разработки новых зависимостей и методик [4 – 7].

Цель статьи. Уточнение зависимости частоты собственных поперечных колебаний длинных костей конечностей человека от механической жесткости костного регенерата при диафизарных переломах.

Исходные данные. Наиболее простым методом контроля в этом случае является метод, который используется в технике. Кость конечности укладывается горизонтально на две опоры по концам кости, и затем подвергается нагрузке в середине ее длины. По величине прогиба производится оценка относительной жесткости кости. Этот метод подробно рассмотрен в литературе [1]. После нескольких измерений можно сделать прогноз относительно сроков лечения болезни. Ясно, что на практике использовать этот метод затруднительно из-за необходимости транспортировки больного, наличия гипсовой повязки, влияния мягких тканей и собственного веса конечности и других причин.

Однако, этот метод может быть трансформирован, что позволяет избежать многих недостатков. Представим, что нагрузка, прогибающая кость, моментально снимается. Освобожденная кость выпрямляется и совершает несколько поперечных колебаний на собственной частоте. Очевидно, что частота колебаний будет зависеть от ее жесткости в диафизарной части. Чем больше жесткость, тем выше частота собственных колебаний. В живом организме эти колебания быстро затухают вследствие влияния мягких тканей и соединений в суставах. Амплитуда колебаний вполне достаточна для проведения технических измерений, колебания легко ощущаются пальцами руки.

Вясним зависимость частоты собственных поперечных колебаний длинной целой кости от жесткости ее диафизарного участка, т.е. от величины EJ , где E – модуль продольной упругости материала кости, J – осевой момент инерции сечения кости, причем, ось сечения перпендикулярна действию нагрузки. Пусть длинная кость совершает свободные поперечные колебания, сгибаясь и разгибаясь в диафизарном участке длины. Считаем колебания линейными и без потерь энергии. При таких колебаниях поперечное сечение кости в середине ее длины остается параллельным самому себе. Представим, что кость закреплена в этом сечении. Таким образом, кость теперь состоит из двух независимых консолей, совершающих поперечные колебания. Рассмотрим колебания правой консоли. Математической моделью такой кости является закрепленный на левом конце упругий, не имеющий массы стержень, на правом конце которого расположена масса m . Стержень обладает жесткостью EJ и имеет длину L от места закрепления до центра массы m . Назовем массу m приведенной массой, а длину L – приведенной длиной консоли.

Поперечные колебания такой консоли описываются формулой пружинного маятника. Роль пружины играет упругий стержень. Вывод формулы для частоты собственных колебаний f приведен в работе [6]:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{mL^3}}. \quad (1)$$

Таким образом, частота поперечных колебаний длинной кости конечности человека пропорциональна корню квадратному из величины жесткости кости в ее диафизарной части. При уменьшении жесткости EI в два раза частота убывает в 1,4 раза. Однако, как ясно из вывода формулы, она может применяться только тогда, когда изменение жесткости материала происходит по всей длине кости, например при остеопорозе. Трещина в диафизарной части кости является компактным дефектом, в котором жесткость материала кости может быть значительно меньше исходной, и поэтому формула (1) требует уточнений.

Вывод уравнения. Выясним зависимость частоты собственных поперечных колебаний длинной кости от величины жесткости материала в компактном дефекте. При постепенном развитии трещины и, следовательно, ослаблении сечения кости, кость переходит от колебаний с равномерным изгибом по длине кости к колебаниям с изгибом преимущественно в месте трещины, а при значительном ослаблении сечения – колебаниям двух половинок кости относительно сечения, где расположена трещина. Последний вариант соответствует также срастающейся кости с небольшой плотностью регенерата в месте перелома.

Представим, что посередине длины кости имеется узкий поперечный участок с низким модулем упругости. Ширина этого участка обычно не превышает 3 мм, так как известно, что при зазоре между отломками кости более 3 мм образование регенерата затруднено.

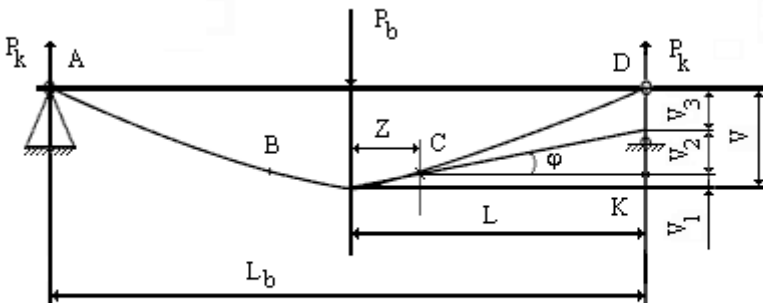


Рис. 1. Модель длинной кости

Выведем зависимость между частотой собственных поперечных колебаний и жесткостью регенерата $E_p J_p$ в этом участке. Рассмотрим кость как балку, состоящую из трех участков (рис.1). Участки AB и CD равны по длине и имеют модуль упругости E неповрежденной кости. Участок BC имеет модуль упругости $E_p < E$. Балка прогибается под воздействием силы приложенной в середине участка BC . Общий прогиб балки V будет включать в себя три слагаемых: V_1 – прогиб участка BC , V_2 – прогиб за счет поворота сечений балки в точках B и C , и V_3 – прогиб участков AB и CD .

Величину прогиба V_1 можно определить по формуле (2), приведенной в литературе [8], если, как и в предыдущем случае, балку представить как две консоли, разделенные посередине участка BC . Формула позволяет определить прогиб в любом сечении консоли, в нашем случае в точке C . Для расчета принимаем, что консоль по всей длине имеет одинаковую жесткость $E_p J_p$.

$$V_l = \frac{P_k L Z^2}{2E_p J_p} - \frac{P_k Z^3}{6E_p J_p}, \quad (2)$$

где Z – расстояние от середины участка BC (места раздела балки на консоли) до точки C , т.е. половина длины участка BC . Принимаем равным 1,5 мм;

L – длина консоли, равная половине длины L_b . Принимаем L равным 200 мм ;

P_k – сила, создающая прогиб консоли, равная половине силы P_b , создающей прогиб балки.

Второе слагаемое (V_2) можно определить, вычислив предварительно поворот сечения в точке C по формуле (3), приведенной в [8]:

$$\varphi = \frac{P_k L Z}{E_p J_p} - \frac{P_k Z^2}{2E_p J_p}, \quad (3)$$

где значения P_k , L и Z такие же, что и в формуле (2).

Анализируя треугольник с углом φ (рис.1), можно записать:

$$V_2 = (L - Z) \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad (4)$$

где: φ – угол поворота сечения в точке C .

Далее считаем, что отрезок CK равен L , а величиной $Z = 1,5$ мм по сравнению с $L = 200$ мм можно пренебречь. Так как угол φ на практике значительно меньше 1° , заменим в формуле (4) $\operatorname{tg} \varphi$ на φ .

$$V_2 = L \cdot \varphi = \frac{P_k L^2 Z}{E_p J_p} - \frac{P_k L Z^2}{2 E_p J_p}. \quad (5)$$

Если предположить, что балка не содержит участка BC , и V_3 образуется за счет изгиба однородного стержня, имеющего жесткость неповрежденной кости EJ , то третье слагаемое (V_3), можно определить по формуле (6), приведенной в [8]:

$$V_3 = \frac{P_k L^3}{3EJ}. \quad (6)$$

Тогда

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{P_k L Z^2}{2 E_p J_p} - \frac{P_k Z^3}{6 E_p J_p} + \frac{P_k L^2 Z}{E_p J_p} - \frac{P_k L Z^2}{2 E_p J_p} + \frac{P_k L^3}{3EJ}. \quad (7)$$

Здесь первое и четвертое слагаемые взаимно вычитаются, а второе слагаемое, содержащее Z^3 , примерно на два порядка меньше третьего и пятого слагаемых и им можно пренебречь. Формула (7) после упрощения будет выглядеть следующим образом:

$$V = \frac{P_k L^2 Z}{E_p J_p} + \frac{P_k L^3}{3EJ}. \quad (8)$$

Таким образом, общий прогиб создается, в основном, за счет поворота сечения в точке C и за счет прогиба участков AB и CD . Для определения зависимости частоты колебаний консоли от жесткости регенерата $E_p J_p$ на участке BC , подставим выражение (8) в формулу колебаний пружинного маятника [6, 9, 10]:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{P_k}{mV}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m \left(\frac{L^2 Z}{E_p J_p} + \frac{L^3}{3EJ} \right)}}. \quad (9)$$

В связи с тем, что прогибы консоли и балки одинаковы по величине и отличаются только знаком, для выяснения характера зависимости воспользуемся формулой (9). Подставим в формулу следующие усредненные значения, например, для большеберцовой кости: $P_k = 200$ мм, $Z = 1,5$ мм, $m = 0,5$ кг, $J_p = J = 106 \cdot 10^{-8}$ м⁴. Изменение E_p в процессе минерализации приведено в [1]. В начальной стадии минерализации $E_p \approx 10^8$ Па, в конечной стадии $E_p \approx 2 \cdot 10^{10}$ Па, т.е. примерно равно величине, характерной для плотного вещества кости в ее диафизарной части. Таким образом, увеличение жесткости регенерата $E_p J_p$ за счет минерализации может достигать 200 и более раз. При этом предполагается, что регенерат заполняет все рабочее сечение

кости в месте перелома. При неполном заполнении сечения жесткость регенерата в месте перелома может быть снижена еще в 5 – 10 раз, за счет уменьшения J_p в произведении $E_p J_p$.

Анализ уравнения. Произведем расчет частоты f по формуле (9) для отношений $EJ/E_p J_p$ в пределах от 1 до 2048 и сведем полученные данные в таблицу. Для упрощения расчетов последовательность отношений от 1 до 2048 принимаем кратной 2^i , где i изменяется от 1 до 11.

Таблица

$EJ/E_p J_p$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
f , Гц	627	620	608	584	544	454	407	323	245	180	130	93
$f_{\text{эксп}}$, Гц	900	890	873	838	781	695	584	464	352	258	187	134

Так как расчет приведенных величин m_k и L не производился, то шкала частот f будет отличаться от шкалы частот $f_{\text{эксп}}$, получаемых в эксперименте. Пересчитаем приведенную в таблице шкалу соотношений частот f в шкалу частот $f_{\text{эксп}}$. Для этого для соотношения $EJ/E_p J_p = 1$, то есть, для неповрежденной кости, принимаем частоту $f_{\text{эксп}} = 900$ Гц, близкую к среднестатистической для большеберцовой кости. Пересчитанная шкала частот расположена в нижней строке таблицы. На рис. 2 приведен график зависимости $f_{\text{эксп}}$ от отношения $EJ/E_p J_p$. Из графика видно, что зависимость f от жесткости регенерата достаточно сложная. Можно заметить, что для $f_{\text{эксп}}$ отношение максимальной частоты к минимальной близко к отношению этих частот, измеренных на практике для различных пациентов [6]. Это говорит о том, что полученная зависимость достаточно близка к реальности. Анализируя график, можно отметить, что при отношении $EJ/E_p J_p < (200 \div 250)$, т.е. при частотах $f_{\text{эксп}}$ более 350 Гц, поперечное сечение кости в месте перелома уже полностью или почти полностью заполнено регенератом и далее будет идти его минерализация. Если измеренная частота $f_{\text{эксп}}$ ниже 300 Гц, то процесс заполнения места перелома регенератом еще не закончен. Если измеренная частота ниже 200 Гц, то заживления перелома либо не происходит, либо только начинается, в зависимости от сроков.

При уменьшении величины Z общая жесткость диафизарного участка длинной кости увеличивается. При этом верхняя частота шкалы $f_{\text{эксп}} = 900$ Гц практически не изменяется, а нижняя возрастает. При уменьшении Z с 1,5 мм до 1 мм нижняя частота $f_{\text{эксп}}$ возрастает с 135 Гц до 162 Гц, а при $Z = 0,5$ мм – до 224 Гц. Практическое значение Z не получается менее 0,25 мм даже при хорошем сопоставлении отломков и их компрессии. В большинстве случаев значение Z будет находится в пределах от 0,4 до 1 мм. При значении Z менее 0,5 мм во время сопоставления отломков возможно появление участков, в которых отломки кости будут упираться друг в друга, и характер зависимости

уже будет другой. Однако, в процессе минерализации регенерата характер зависимости будет восстанавливаться и соответствовать рис. 2. Величина Z ориентировочно может быть известна по результатам операции или из анализа рентгеновских снимков. Таким образом, метод измерения частоты собственных поперечных колебаний и методы рентгенодиагностики дополняют друг друга на начальной стадии восстановления переломов.

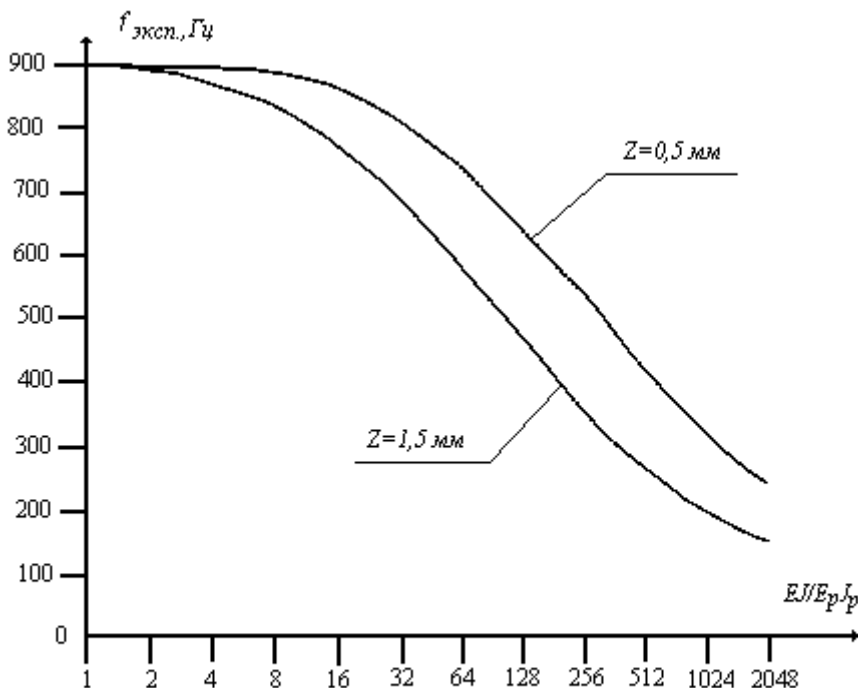


Рис. 2. Зависимость частоты колебаний от жесткости костного регенерата

Последовательность действий при оценке степени восстановления перелома поврежденной кости по отношению к здоровой кости может быть следующей. Вначале определяется частота собственных колебаний здоровой кости противоположной конечности. Допустим, для большеберцовой кости эта частота получается равной 800 Гц. Тогда начало соответствующей кривой Z перемещается на этот уровень. На оси ординат откладывается частота, измеренная для срастающейся кости, и, руководствуясь кривой, определяется отношение $E/J_p E_p$. По значению этого отношения производится оценка степени восстановления перелома. Необходимо учитывать, что, т.к. колебания конечности являются поперечными, измерения частоты надо производить в

двух взаимно перпендикулярных плоскостях, расположенных вдоль продольной оси.

Выводы. В данной статье автором уточнена зависимость частоты собственных поперечных колебаний длинных костей конечностей человека от механической жесткости костного регенерата. Полученная зависимость может являться базой для оценки степени восстановления переломов, а также для дальнейшего проведения исследований по данной методике.

Из экспериментальных данных можно видеть, что полученная зависимость достаточно близка к экспериментальным значениям и качественно совпадает с ними. Экспериментальная проверка зависимости частоты собственных поперечных колебаний длинных костей конечностей человека от механической жесткости костного регенерата была проведена на базе ЭВМ с помощью программы спектрального анализа.

Список литературы: 1. Янсон Х.А. Биомеханика нижней конечности человека. – Рига: "Зинатне", 1975. – 324 с. 2. Корнелиссен И.М. Диагностика степени сращения переломов с помощью вибрационного анализа // Достижения биомеханики в медицине: Тезисы докладов. – Рига, 1986. – С. 668. 3. Тарасов С.В., Бенгелимев И.Б. Устройство для диагностики костей. – Бюл. № 16. – 1992. – С. 30. 4. Карпинский М.Ю., Зубатый С.С. и др. Математическое исследование механических колебательных свойств длинных костей // Медицина и... , 2000. – № 1. – С. 47–50. 5. Маслов Л.Б., Шалин В.И. и др. Резонансные характеристики большеберцовой кости в процессе восстановления упругих свойств костной мозоли. – Сб. трудов. Биомеханика. – Н. Новгород, 2002. – С. 80. 6. Чертенкова Э.В., Органов В.В. и др. Определение несущей способности кости методом звуковой спектроскопии // Медицина и... , 2004. – № 1. – С. 43–45. 7. Органов А.В. Ранняя диагностика плотности костной мозоли виброакустическим методом // Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: Тезисы докладов конф. – Харьков, 2002. – С. 363. 8. Винокуров Е.Ф., Балыкин М.К. и др. Справочник по сопротивлению материалов. – Минск: Наука и техника, 1998. – 464 с. 9. Кузьмичев В.Е. Законы и формулы физики. – К.: Наукова думка, 1989. – 864 с. 10. Дубровский И.М., Егоров Б.В. и др. Справочник по физике. – К.: Наукова думка, 1986. – 557 с.

Поступила в редакцию 15.04.2005